

# FGE2255 Física Experimental para o Instituto de Química

Segundo Semestre de 2008

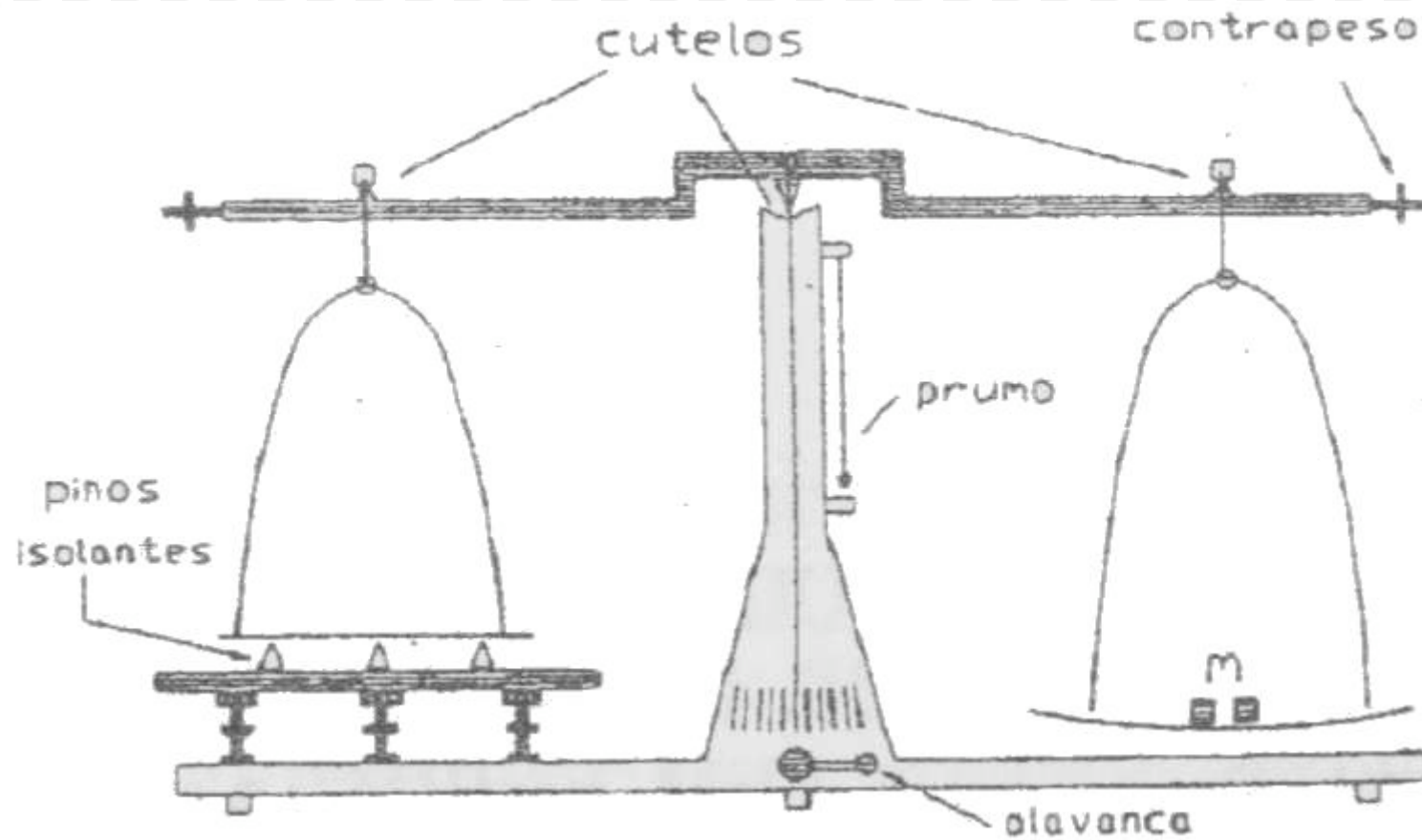
Experimento 2

[http://fge.if.usp.br/~takagui/fge2255\\_2008](http://fge.if.usp.br/~takagui/fge2255_2008)

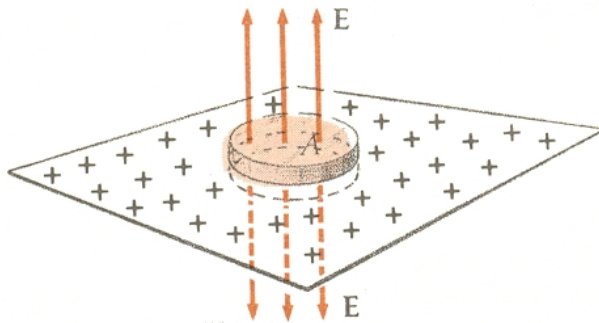
## E2: Balança Eletrostática

- Objetivos:
  - Comprovar as leis da eletrostática através da medida da força de atração entre duas placas de um capacitor
  - Determinar o valor da constante de permissividade  $\epsilon_0$
  - Análise de dados:
    - Propagação de erros;
    - Análise Gráfica: linearização.

# Arranjo Experimental



# Fundamentos teóricos



Pela lei de Gauss :

$$2E_{\text{placa}} \cdot A = Q/\epsilon_0 \therefore E_{\text{placa}} = Q/2A\epsilon_0 = \sigma/2\epsilon_0$$

Fora do capacitor,  $E = 0$ . Dentro,

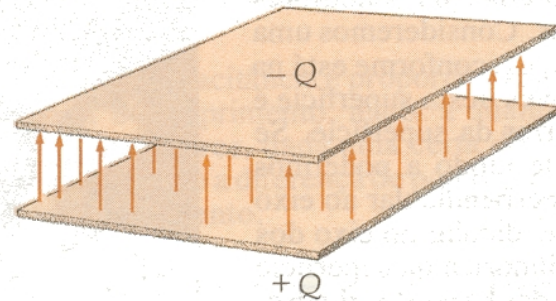
$$E_{\text{cap}} = 2E_{\text{placa}} = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$$

Potencial :

$$V = \int E \cdot ds = E_{\text{cap}} d = \frac{Qd}{A\epsilon_0}$$

$$\therefore Q = \frac{\epsilon_0 AV}{d}$$

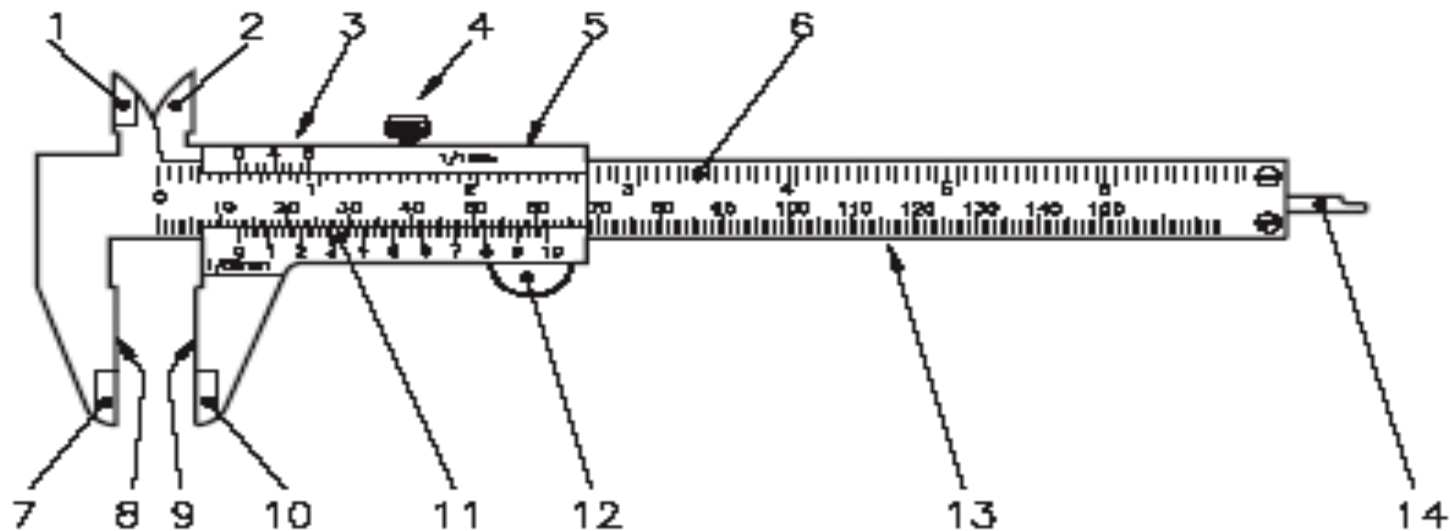
$$F = QE_{\text{placa}} = \frac{Q^2}{2A\epsilon_0} \therefore F = \frac{\epsilon_0 A}{2d^2} V^2$$



# Procedimento experimental

- **Atenção: Alta tensão! Não toque nos pratos nem na montagem quando aplicar alta tensão!**
- **Preparação:**
  - Siga as instruções da apostila pela ordem.
  - Na medida da área do capacitor, é a placa superior que deve ser medida. Adote uma incerteza de 0,5cm no diâmetro para levar em conta efeitos de borda. Calcule a área  $A$  com a respectiva incerteza.
  - Na medida da altura dos pinos de espaçamento, meça 3 vezes cada espaçador com o paquímetro. Organize os dados em uma tabela e determine o valor médio do espaçamento  $d$  com a respectiva incerteza.
  - É importante o nivelamento e sobretudo que o prato de cima não se apoie nos espaçadores, mas fique a décimos de mm dos mesmos.

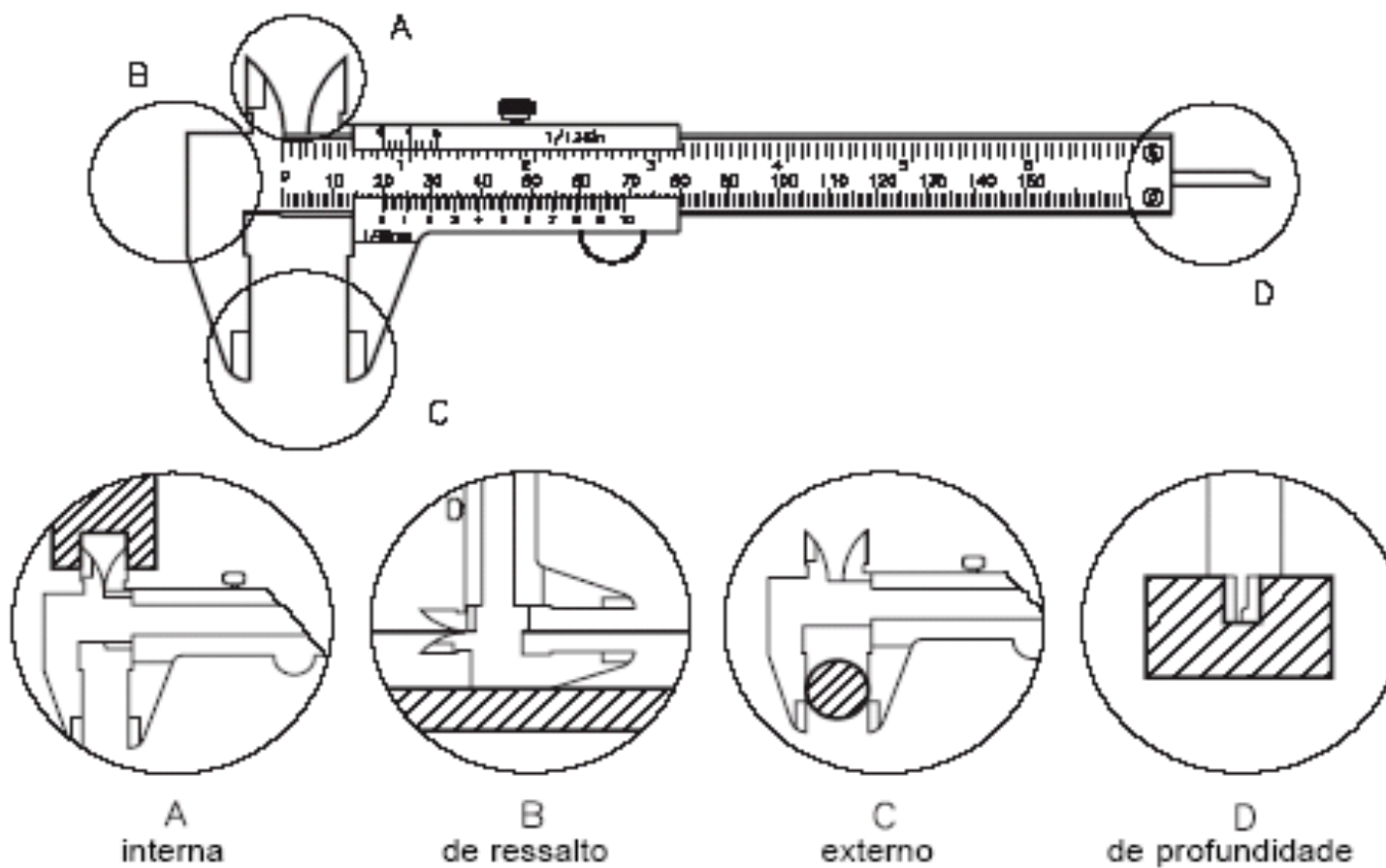
# Paquímetro



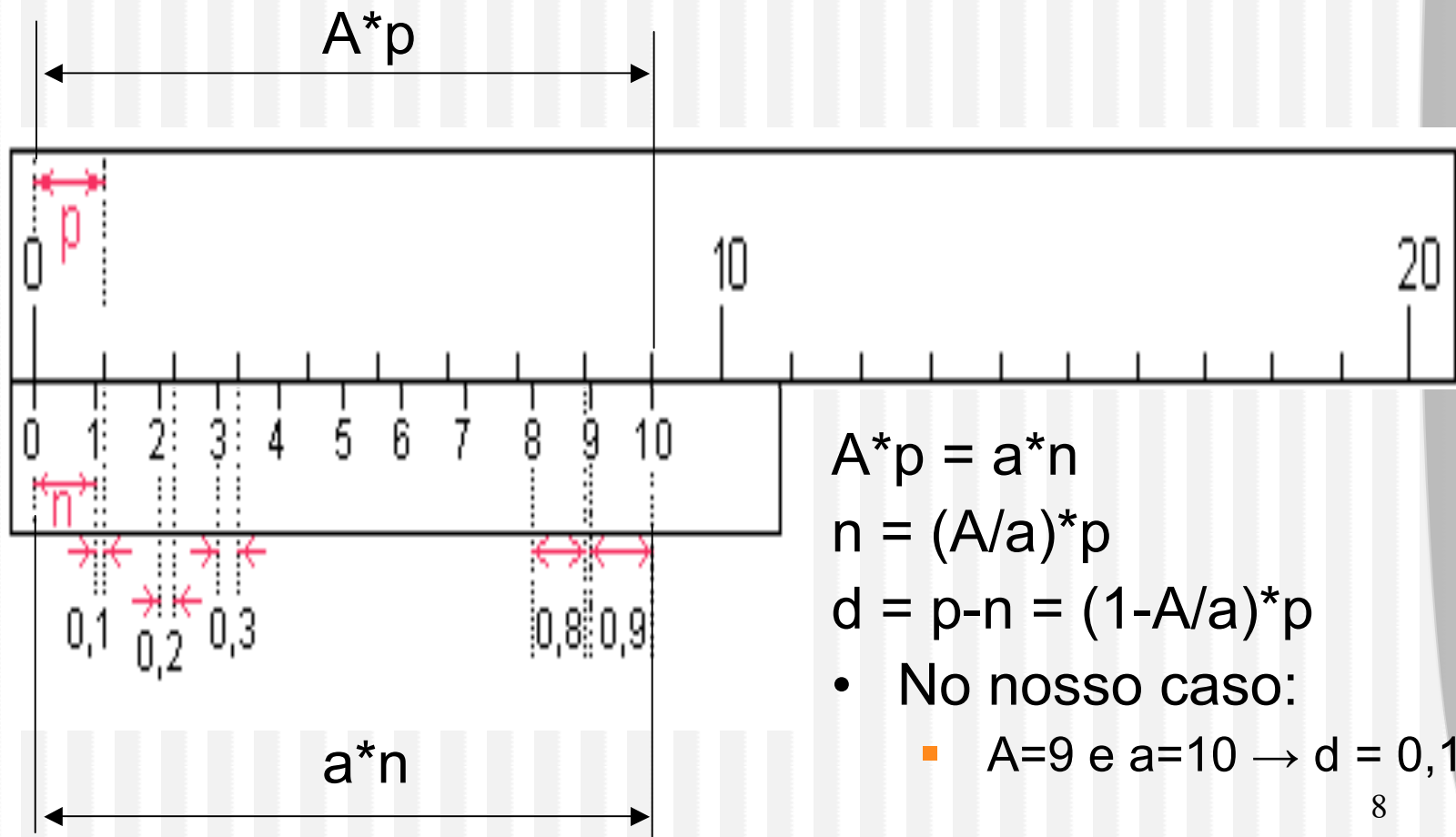
1. orelha fixa
2. orelha móvel
3. nônio ou vernier (polegada)
4. parafuso de trava
5. cursor
6. escala fixa de polegadas
7. bico fixo

8. encosto fixo
9. encosto móvel
10. bico móvel
11. nônio ou vernier (milímetro)
12. impulsor
13. escala fixa de milímetros
14. haste de profundidade

# Modos de utilização



# Princípio de leitura: nônio (ou vernier)



$$A \cdot p = a \cdot n$$

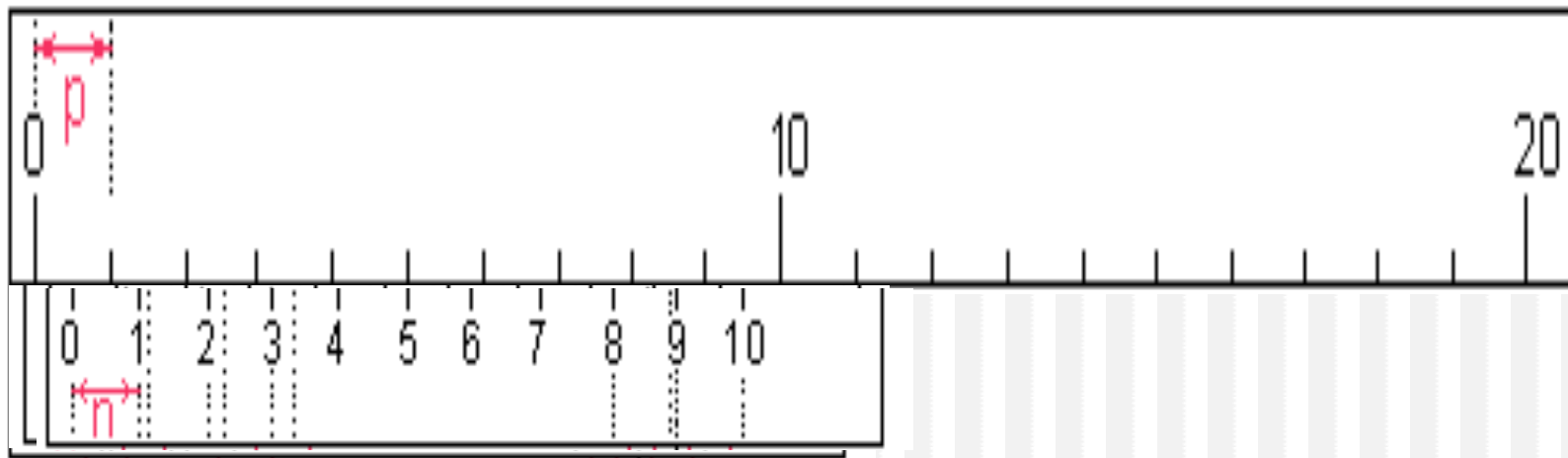
$$n = (A/a) \cdot p$$

$$d = p - n = (1 - A/a) \cdot p$$

• No nosso caso:

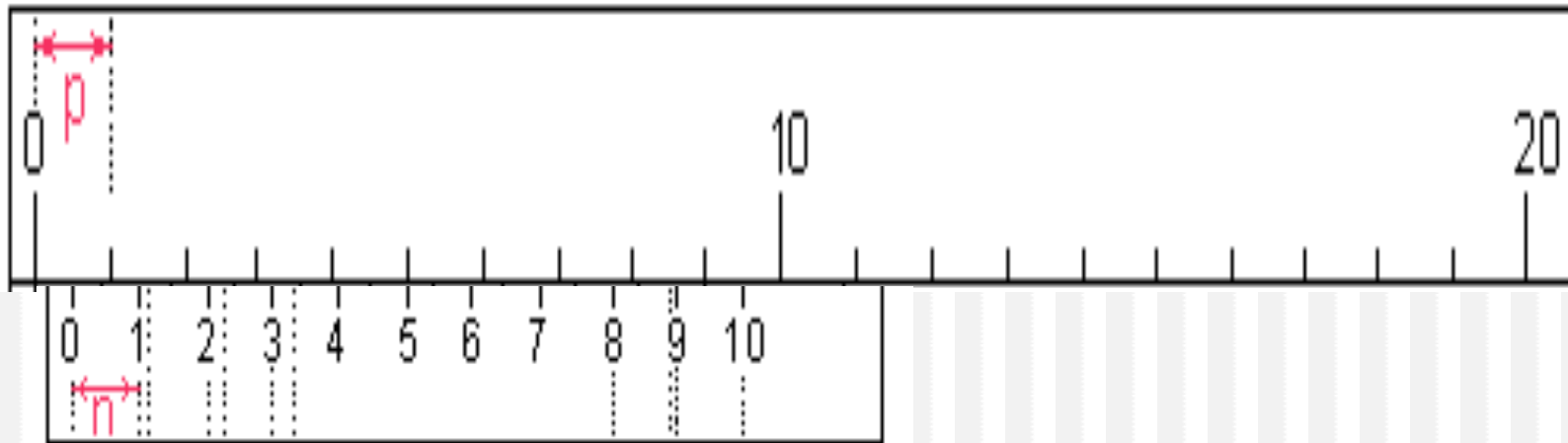
- $A=9$  e  $a=10 \rightarrow d = 0,1 \cdot p$

# Princípio de leitura: nônio (ou vernier)



- Para a marca do 1 no nônio coincidir com a marca do 1 na régua, devo deslocar o zero de  $0,1 \cdot p$
- Para a marca do 2 no nônio coincidir com a marca do 2 na régua, devo deslocar o zero de  $0,2 \cdot p$
- Para a marca do 5 no nônio coincidir com a marca do 5 na régua, devo deslocar o zero de  $0,5 \cdot p$

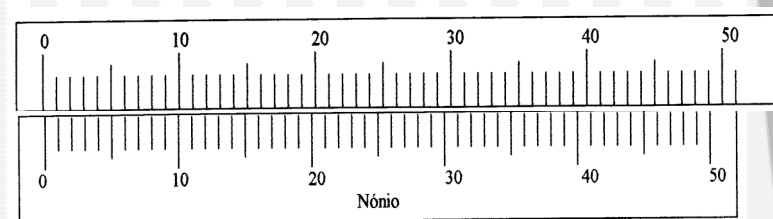
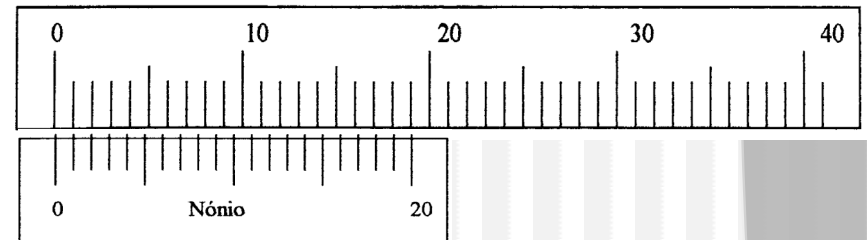
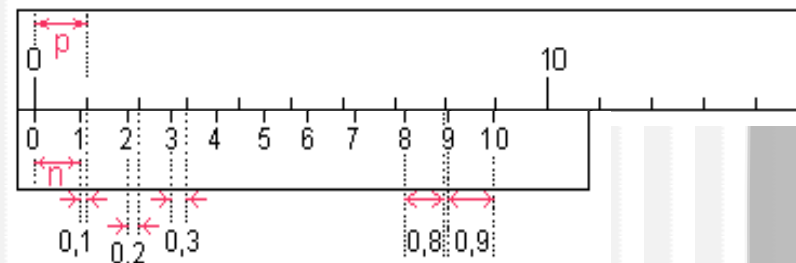
# Princípio de leitura: nônio (ou vernier)



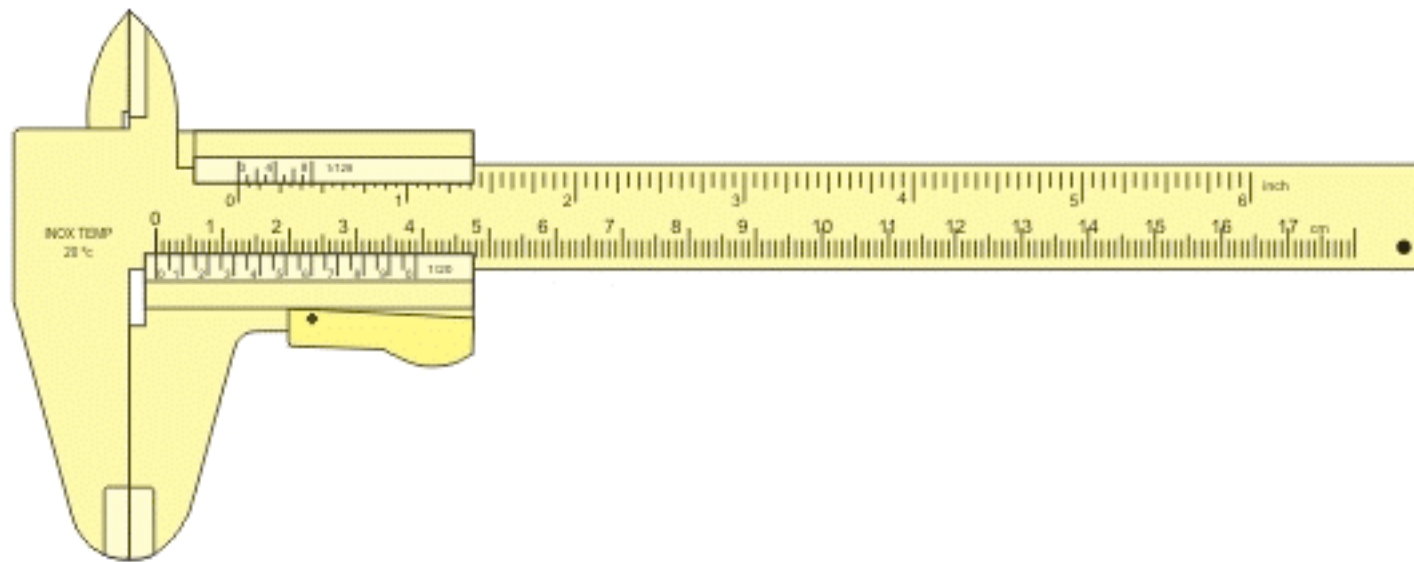
- Assim, a marca do nônio que coincide com a escala da régua esta diretamente relacionada com o deslocamento em relação ao zero
- No caso do paquímetro, não se pode estimar valores intermediários no nônio. Ou a marca do nônio coincide ou não com a escala principal. Assim, a incerteza de leitura, em geral, é dada pela divisão do nônio e não pela metade da menor divisão.<sup>10</sup>

# Tipos de nônio

- Nônio de décimos (p, em geral vale 1mm)
  - $A = 9$  e  $a = 10$
  - $d = (1-A/a)*p = 0,1*p$
  - $d = 0,1$  mm
- Nônio de vigésimos
  - $A = 19$  e  $a = 20$
  - $d = 0,05$  mm
- Nônio de quinquagésimos
  - $A = 49$  e  $a = 50$
  - $d = 0,02$  mm



# Usando o paquímetro



# Análise estatística de dados

- Quando flutuações de medidas têm origem aleatória (ou quase) pode-se fazer análises estatísticas.
  - Ex: As irregularidades da mesa
  - A flutuação no disparo de um cronômetro
- Nesse caso, pode-se separar as incertezas instrumentais dessas de caráter aleatório, denominadas incertezas estatísticas.

# Como fazer uma análise estatística

- Suponha que você repita um determinado experimento várias vezes, utilizando sempre o mesmo instrumento e procedimento de medida
  - Cada medida efetuada apresenta um resultado diferente devido ao caráter aleatório das flutuações experimentais (imperfeição da mesa, tempo de reação para disparar o cronômetro)
  - A análise desse conjunto de medidas permite determinar um resultado mais confiável, bem como estimar uma incerteza mais realista.

# Conceitos importantes

- Média de um conjunto de medidas
- Desvio padrão de um conjunto de medidas
  - Grandeza que caracteriza a amplitude das flutuações estatísticas observadas. É também a incerteza estatística associada a uma única medida efetuada.
- Incerteza do valor médio
  - Também denominado “desvio padrão da média”, é a incerteza estatística do valor médio obtido.

# Média

- Se forem realizadas  $n$  medidas de uma mesma grandeza, e cada uma delas possuir a mesma incerteza, a média de um conjunto de medidas é dada pela média aritmética simples, ou seja:

Assim como cada medida é, por definição, diferente do valor verdadeiro de uma grandeza, o valor médio também não corresponde ao valor verdadeiro de uma grandeza.

Quanto maior o número de medições, mais precisa é a medida do valor médio.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{y} = \bar{y}_{verd}$$

# Desvio padrão

- Utiliza-se o desvio quadrático

$$d_i^2 = (y_i - \bar{y}_{verd})^2$$

- O desvio padrão ( $\sigma$ ), ou desvio quadrático médio de uma medida é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{verd})^2} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

(n-1) vem do fato da definição de desvio padrão ser a diferença entre a medida e o valor médio verdadeiro, que não pode ser obtido experimentalmente. Ver Seção 7.4 do Livro “Fundamentos da Teoria de Erros”, J. H. Vuolo

# Qual o significado do desvio padrão?

- Pode-se entender como sendo a “distância” média que qualquer medida tem em relação ao valor médio.
- O desvio padrão é o correspondente à incerteza estatística de uma única medida realizada. Cada medida, além da incerteza instrumental, possui uma incerteza estatística dada pelo desvio padrão.

# Qual a incerteza estatística do valor médio?

- De um conjunto de medidas, obtemos o seu valor médio
- Agora suponha que possamos repetir esse conjunto de medidas  $k$  vezes e, em cada caso, obtem-se um valor médio

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \dots, \bar{y}_k$$

- O desvio padrão dos valores médios corresponde à incerteza estatística de cada valor médio da amostra

# Qual a incerteza estatística do valor médio?

- Desvio padrão dos valores médios

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \bar{y}_{verd})^2}$$

- Substituindo a expressão para o valor médio na expressão acima, pode-se deduzir que o desvio padrão do valor médio vale:

$$\sigma_m \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Incerteza estatística  
do valor médio de  
uma medida

# Média, desvio padrão e desvio padrão da média

- Média
- Desvio padrão
- Desvio padrão da média

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$\sigma_m \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

# Qual é a incerteza de uma medida?

- Suponha que o experimentador realize várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua.
  - Incerteza instrumental:  $\sigma_{\text{instr}} = 0,5 \text{ mm}$
  - Incerteza estatística:  $\sigma_{\text{estat}} = \sigma_m$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{instr}}^2 + \sigma_{\text{estat}}^2}$$

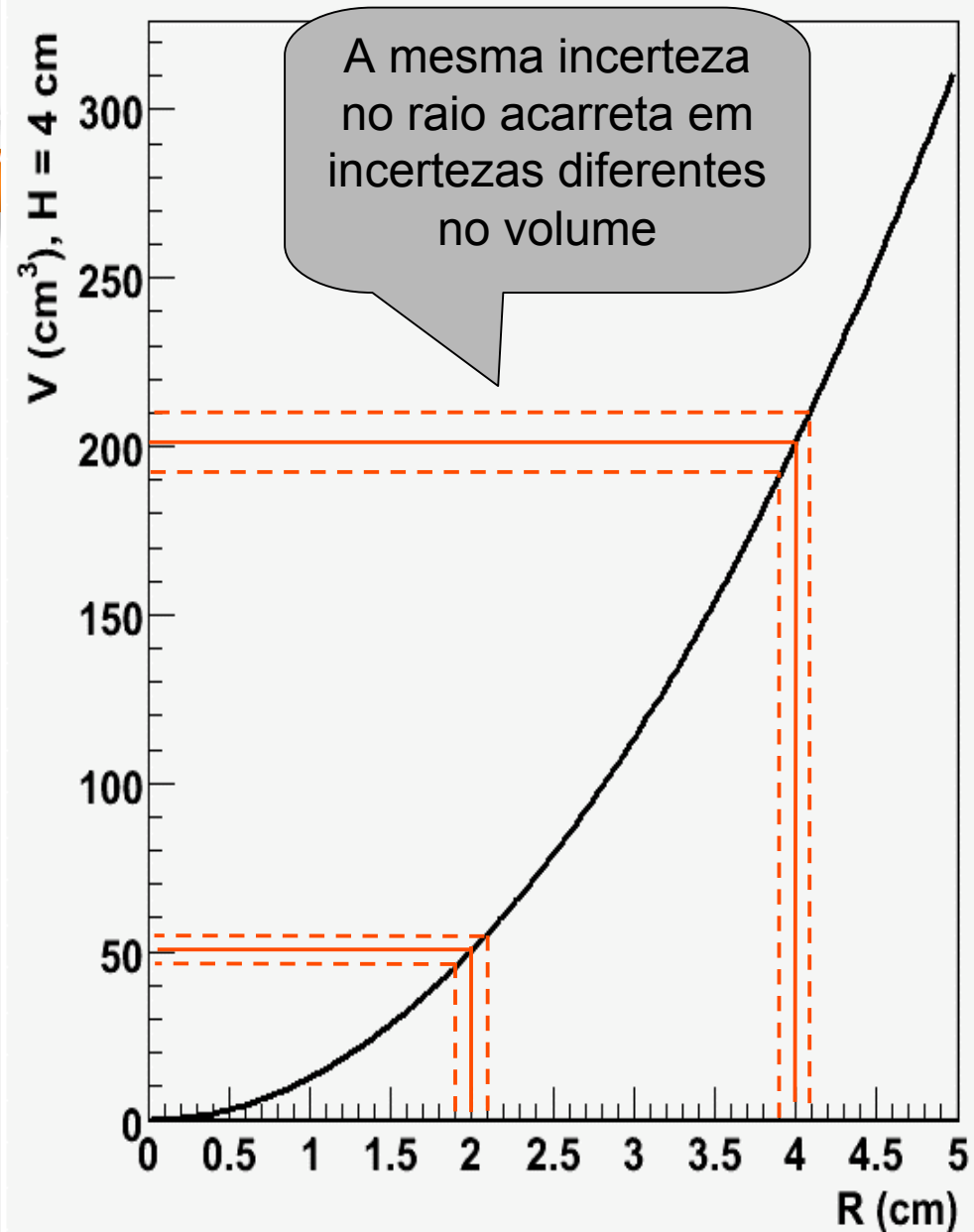
- Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.
  - Ex: Período do pêndulo medido com o relógio de pulso. Nesse caso, a incerteza instrumental é muito maior que a estatística

# Propagação de incertezas

- Volume de um cilindro  
 $V = \pi R^2 H$
- Como uma variação na medida de raio afeta o volume?
- Essa variação é a mesma, independente da medida do raio?

$$\Delta V_R = \frac{\partial V}{\partial R} \Delta R$$

$$\sigma_V(R) = \frac{\partial V}{\partial R} \sigma_R$$



# Propagação de erros: fórmula geral

- Seja uma grandeza  $G$ , dependente de duas variáveis,  $A$  e  $B$ . O valor da incerteza em  $G$ ,  $\sigma_G$ , pode ser expressa em termos das incertezas em  $A$  e  $B$  ( $\sigma_A$  e  $\sigma_B$ , respectivamente) através da fórmula:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial A} \sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial B} \sigma_B\right)^2}$$

Derivada parcial  
de  $G$  em relação  
a  $A$

Não conte aos matemáticos puristas 😊 mas a derivada parcial nada mais é do que a derivada comum onde todo o resto da equação pode ser considerado constante

# Vamos fazer um exemplo simples

- Volume de um cilindro

$$V = \frac{\pi}{4} D^2 H$$

- O Volume depende tanto do diâmetro  $D$ , cuja incerteza é  $\sigma_D$ , e da altura  $H$ , com incerteza  $\sigma_H$ . Assim, a incerteza do volume é dada por:

$$\sigma_V = \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial H} \sigma_H \right)^2}$$

# Como calcular as derivadas

- Suponha que todo o resto da expressão é uma constante....

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{\pi}{4} D^2 H \right) = \frac{\pi}{4} H \frac{\partial(D^2)}{\partial D} = \frac{\pi}{4} H (2D) = \frac{\pi}{2} DH$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{\pi}{4} D^2 H \right) = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\partial(H)}{\partial H} = \frac{\pi}{4} D^2 (1) = \frac{\pi}{4} D^2$$

# Desse modo...

- Incerteza do volume do cilindro

$$\begin{aligned}\sigma_V &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial D} \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial H} \sigma_H\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} DH \sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} D^2 \sigma_H\right)^2} = \frac{\pi}{4} D^2 H \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2} \\ \frac{\sigma_V}{V} &= \sqrt{\left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_H}{H}\right)^2}\end{aligned}$$

# Eu preciso fazer esse montão de derivadas e contas toda vez?

- A rigor deve-se sempre calcular as derivadas
- Na prática, com o tempo, desenvolve-se técnicas que simplificam a nossa vida
- Alguns casos muito comuns:
  - Soma e subtração
  - Multiplicação e divisão
    - Multiplicação ou divisão por constante
  - Potenciação

# Alguns casos comuns

- Soma e subtração
  - A incerteza **absoluta** da soma (ou subtração) é a raiz da soma quadrática das incertezas absolutas individuais
- Multiplicação e divisão
  - A incerteza **relativa** do produto (ou divisão) é a raiz da soma quadrática das incertezas relativas individuais

$$C = A + B, \text{ ou } C = A - B$$

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

$$C = AB, \text{ ou } C = \frac{A}{B}$$

$$\frac{\sigma_C}{C} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$$

# Alguns casos comuns

- Multiplicação ou divisão por constante
  - A incerteza **absoluta** do resultado fica multiplicada ou dividida por aquela constante.
- Potenciação
  - A incerteza **relativa** do resultado é a raiz da soma quadrática das incertezas relativas dos potenciandos multiplicadas pelas respectivas potências..

$$B = cA \rightarrow \sigma_B = B \cdot \frac{\sigma_A}{A} = c \cdot \sigma_A$$

$$B = \frac{A}{c} \rightarrow \sigma_B = B \cdot \frac{\sigma_A}{A} = \frac{\sigma_A}{c}$$

$$C = A^\alpha \cdot B^\beta$$

$$\frac{\sigma_C}{C} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_A}{A}\right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_B}{B}\right)^2}$$

# Procedimento experimental

- **Atenção: Alta tensão! Não toque nos pratos nem na montagem quando aplicar alta tensão!**
- **Preparação:**
  - Siga as instruções da apostila pela ordem.
  - Na medida da área do capacitor, é a placa superior que deve ser medida. Adote uma incerteza de 0,5cm no diâmetro para levar em conta efeitos de borda. Calcule a área  $A$  com a respectiva incerteza.
  - Na medida da altura dos pinos de espaçamento, meça 3 vezes cada espaçador com o paquímetro. Organize os dados em uma tabela e determine o valor médio do espaçamento  $d$  com a respectiva incerteza (indicar o desvio padrão da amostra, o desvio da média, o desvio instrumental, e o desvio total de  $d$ ).
  - É importante o nivelamento e sobretudo que o prato de cima não se apoie nos espaçadores, mas fique a décimos de mm dos mesmos.

# Procedimento experimental

- Teste de funcionamento:
  - Com a balança equilibrada, ligue a fonte e aumente lentamente a tensão e verifique que as placas se atraem.
  - Com a tensão desligada, coloque um peso de teste (10g por exemplo), junte os pratos utilizando uma régua plástica, e aumente a tensão até as placas ficarem grudadas.
  - Determine a tensão em que a força eletrostática equilibra a força gravitacional, diminuindo lentamente a tensão até as placas se soltarem.
  - Calcule o valor de  $\epsilon_0$  preliminar.

# Tomada de dados

- Se o valor preliminar de  $\varepsilon_0$  estiver dentro de até 10 ou 20%, prossiga.
- Escolha 6 valores diferentes de massa (máx 18g) e para cada massa meça 5 vezes o valor da voltagem  $V$  que equilibra a balança. Coloque os resultados em uma tabela ( $m$ ,  $V_i$ ,  $i=1-5$ ) com uma massa em cada linha juntamente com os respectivos valores de  $V$ .
- Na mesma tabela crie mais 4 colunas para lançar: o valor médio de  $V$ , o desvio padrão, o desvio da média e a incerteza total de  $V$  (a incerteza instrumental de  $V$  será fornecida pelo professor).

# Análise dos dados

$F = \frac{\varepsilon_0 A}{2d^2} V^2 \Rightarrow$  um gráfico  $F \times V^2$  deverá ser uma reta

de coeficiente angular  $\frac{\varepsilon_0 A}{2d^2}$

- Crie mais duas colunas na tabela anterior, uma para lançar  $V^2$  e outra para  $\sigma_{V^2}$ .
- Faça o gráfico no computador (instruções fornecidas) de  $F(\text{gf})$  versus  $V^2(\text{Volt}^2)$ , incluindo as barras de erro.
- Faça um ajuste linear (v. instruções) e determine o coeficiente angular com a incerteza e a unidade.
- Determine então o valor de  $\varepsilon_0$  e sua incerteza.  
( $1\text{gf} = 10^{-3} \times 9,786\text{N}$ )

# Relatório

- Siga as orientações propostas na apostila
- Tabelas e gráficos devem ser identificados com títulos